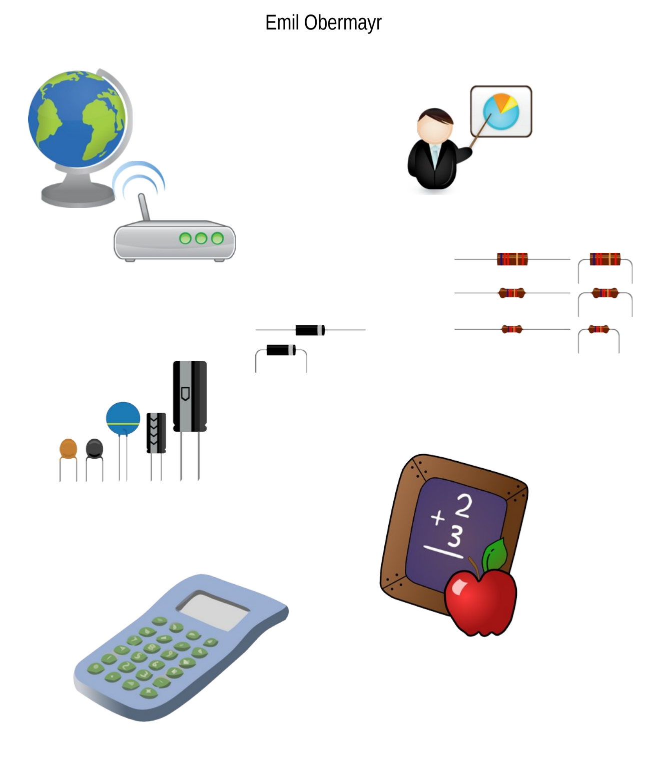
Technisches Rechnen
für Funkamateure



Emil Obermayr



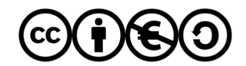
Autor:
Emil Obermayr, DD3AH
https://dd3ah.de/ *hier ist auch der Link zur aktuellsten Version*
mail@dd3ah.de *für Kontakt, Anmerkungen und Kommentare*

- Jahrgang 1967
- Mitglied im DARC, OV Albstadt, DOK P34
- Funkamateur seit 1984
- beruflich in der IT tätig

Dieses Dokument wurde mit Hilfe von LibreOffice erstellt:
https://de.libreoffice.org/
Die Grafiken stammen entweder aus diesem Office-Paket
oder wurden selbst erstellt mit Inkscape:
https://inkscape.org/de/

Haftungsausschluss
Der Inhalt wurde nach bestem Wissen erstellt. Es wird keinerlei Haftung übernommen.
Hinweise und Korrekturen werden gern angenommen.





Stand
22.06.23 15:20:17

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung



In diesem Kurs über technisches Rechnen wird versucht, die mathematischen Methoden über eine *Motivation* einzuführen, also zu erklären, warum man sie (prä-) historisch überhaupt erfunden hat. Daneben soll ein Einblick in eine exakte Arbeitsweise gegeben werden, die eine spätere Vertiefung in anspruchsvollere Gebiete erleichtern soll. Außerdem werden Aspekte der digitalen Verarbeitung aus der Welt des Programmierens angesprochen, wo immer das naheliegend erscheint.

Als Anleitung zur Benutzung dieses Kurses sei empfohlen, die aufgeführten Beispiele mit anderen Zahlen selbständig nachzurechnen.

> Die eingerahmten Texte fassen Ergebnisse zusammen oder weisen auf Besonderheiten hin.



> Die blau hinterlegten Texte geben weiterführende Hinweise für die besonders interessierten Leser.
>
> Besonders anspruchsvolle Themen sind zusätzlich gekennzeichnet.

Am Rand wurde etwas Platz gelassen für eigene Anmerkungen. Dieser wird auch für erklärende Illustrationen und auflockernde Grafiken genutzt.

2 Zählen

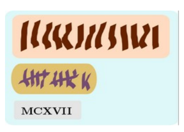


Abb. 1: Strichlisten

Die einfachste mathematische Operation ist wohl das Zählen. Vielleicht haben unserer Vorfahren einfache Strichlisten geführt, um sich zu merken, wie viele Tiere es im Nachbartal zu jagen gibt und um das den anderen mitzuteilen. Wenn diese Strichlisten zu lang werden, werden sie unübersichtlich. Der nächste Schritt ist deshalb, große Zahlen zusammenzufassen. Heute macht man das immer noch, zum Beispiel mit 5er-Gruppen. Die Römer haben größere Zahlen mit Buchstaben benannt.

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Abb. 2: Stellensystem

Eine andere Methode um Zahlen aufzuschreiben ist das Stellensystem der [Arabischen Zahlen](). Dazu braucht man mehrere Dinge: Eine Ziffer Null um anzuzeigen, dass eine Stelle keinen Wert hat, eine *Zahlenbasis*, die angibt, wie viele Zähler auf einer Stelle gezählt werden und weitere Ziffern, so dass wir zusammen mit der Null genau die für die Basis passende Anzahl von Ziffern erhalten. Wir rechnen üblicherweise im 10er-System, weil wir 10 Finger haben, die wir beim Zählen als Hilfsmittel nutzen können. Also braucht man neben der 0 noch die Ziffern 1 bis 9, zusammen also 10. Wenn man beim Zählen an einer Stelle alle Ziffern durchgezählt hat, erfolgt der Übertrag auf die nächste Stelle eins weiter links. Jede weitere Stelle hat also 10-mal so viel Wert wie die Stelle rechts von ihr. Neben dem 10er-System benutzen wir besonders im Umgang mit Computern auch das 2er- und das 16er-System.

Im Alltag findet man auch noch das 12er-System. Wir reden vom „Dutzend“, und die Zahlen 11 und 12 haben in vielen Sprachen eigene Worte.

Das 2er-System ist das einfachste mögliche Stellensystem. Aus zwei Gründen hat es besondere Bedeutung: In der Technik lassen sich zwei Zustände wie z. B. „an“ und „aus“ besonders leicht unterscheiden. Deshalb lassen sich die Zahlen im 2er-System besonders leicht technisch darstellen. Zum anderen lassen sich die Verknüpfungen von Wahrheitswerten (wahr und falsch) der formalen Logik im 2er-System unmittelbar in Rechenoperationen übersetzen.

Die formale Logik, wie wir sie heute benutzen, wurde vom Iren George Boole erfunden. Er hat herausgefunden, wie logische Verknüpfungen wie UND, ODER, NICHT als mathematische Operatoren dargestellt werden können und damit eine wichtige Grundlage für die heutige Informatik geschaffen.



Beide Gründe sind für Computer besonders wichtig. Aufgeschrieben sind Zahlen im 2er-System aber sehr lang. Deswegen fasst man oft jeweils 4 Stellen des 2er-System zu einer Stelle im 16er-System zusammen. Wichtig ist zu verstehen, dass man die Darstellung einer Zahl in jede beliebige *Basis* umrechnen kann. Jede ganze Zahl existiert in jeder Basis.

$13 = 13_{10} = D_{16} = 1101_2$

Wir bleiben hier beim 10er-System.

Wir sind also vom einfachen Zählen mit Strichlisten zu besser lesbaren Zahldarstellungen gekommen. Die Zahlen, in denen sich Dinge zählen lassen, unabhängig von ihrer Darstellung, nennt man natürliche Zahlen.

3 Addition

Nun stellen wir uns vor, unsere Vorfahren haben eine Zahl mit dem Jagdwild aus dem linken Nachbartal und eine vom rechten. Die einzige Methode, die wir bisher haben, die Gesamtanzahl zu erhalten, ist die beiden Gruppen von Jagdwild gemeinsam neu zu zählen. Das ist ziemlich lästig. Die Methode, die nun nahe liegt, ist das gemeinsame Neu-zählen von Zahlen zu vereinfachen. Anstelle also die eine Zahl zur anderen schrittweise dazuzuzählen, *rechnet* man die erste Zahl *plus* die zweite Zahl. Das ist die erste und einfachste Operation, die wir mit Zahlen durchführen können. Das Ergebnis der Addition ist die *Summe.*

Wir kennen nun also Zahlen und eine erste Operation von Zahlen.

4 Subtraktion und Ganze Zahlen

Unsere Vorfahren nutzten ihr Wissen, indem sie die Vorräte, die sie angelegt hatten, gezählt haben. 12 Körbe mit Äpfeln sind im Lager. Aus Erfahrung wissen sie, dass sie 15 Körbe brauchen, um über den Winter zu kommen. Mit etwas Überlegung kommt man also leicht darauf, dass noch 3 Körbe gesammelt werden müssen. Aber was sind das für 3 Körbe? Man kann sie nicht zählen, denn sie sind ja nicht da. Es sind 3 Körbe, die fehlen. Wie sagen: es sind *Minus 3* Körbe. Und die Operation, um von den 15 nötigen und den 12 vorhandenen auf die 3 fehlenden Körbe zu kommen, nennen wir *Subtraktion*. Das Ergebnis der Subtraktion heißt *Differenz*. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

Durch diese Umkehrung haben wir die Natürlichen Zahlen um die Negativen Zahlen zu den Ganzen Zahlen erweitert.

5 Multiplikation

Die Vorräte kommen nun regelmäßig herein. In 3 Wochen Erntezeit landen jede Woche 4 Sack Getreide im Lager. Wir können also addieren: 4 + 4 + 4 = 12 Sack Getreide werden wir am Ende der Erntezeit haben. Weil solche Rechnungen immer wieder nötig sind, kommt man darauf, dass man das auch vereinfachen kann. Wenn man 3 Mal hintereinander 4 addiert, schreiben wir das nun kurz als 3 * 4 und nennen das Multiplikation. Das Ergebnis wird *Produkt* genannt.

Die Multiplikation wird manchmal als * und manchmal auch als x geschrieben und auch gern mal als ● . Wenn es keine Verwechslungsmöglichkeit mit gemischten Brüchen oder ganzen Zahlen gibt, wird das Zeichen auch ganz weggelassen.

6 Die vielen Gesichter der Division

Wenn nun 12 Sack Getreide im Lager sind und die für 5 Wochen reichen müssen, stellen wir fest, dass wir bei der Berechnung der Menge an Getreide, die wir pro Woche verbrauchen können, ein Ergebnis erhalten, das wir noch nicht aufschreiben können. Keine ganze Zahl von Säcken pro Woche ergibt bei Multiplikation mit 5 Wochen genau die 12 Säcke, die wir insgesamt haben. Die einfachste Art, dieses Ergebnis aufzuschreiben, ist als Bruchzahl: 12/5 . Wir nennen solche Zahlen auch Rationale[1] Zahlen. Die erste Zahl nennt man den Zähler und die zweite den Nenner. Aber das hilft uns nicht, ein Gefühl dafür zu bekommen, wie groß diese Zahl nun wirklich ist. Also teilen wir die 12 schrittweise auf. Die Zahl 12 ist mehr als 10. Die Zahl 10 wiederum ist 2 mal der Nenner 5. Übrig bleibt ein Rest von 12 - 2*5 = 2 vom Zähler. Also kann man unser Ergebnis als *gemischten Bruch* schreiben: 12/5 = 2 2/5. Nun sieht man immerhin schon auf den ersten Blick, dass es mehr als 2 Sack Getreide pro Woche sind.

1(lateinisch oder englisch *ratio* = Verhältnis)

Beim Rechnen kann es vorkommen, dass an zwei Stellen gleiche Zahlen oder Ziffern vorkommen. Hier darf man sich nicht dazu verleiten lassen, zu denken, dass diese etwas miteinander zu tun haben. Im vorigen Absatz hat z. B. die 2 vor dem Bruch nichts mit der 2 im Zähler zu tun.

Gemischte Brüche sind eine Ausnahme von der Regel, dass man beim Aufschreiben das Multiplikations-Zeichen weglassen kann und umgekehrt ein weggelassenes Rechenzeichen wie eine Multiplikation zu lesen ist, also normalerweise:

A B = A * B

Dagegen gilt bei gemischten Brüchen die Ausnahme:

2 2/5 = 2 + 2/5

Mit anderen Worten: Immer wenn eine ganze Zahl direkt von einem Bruch gefolgt wird, ist dieser Ausdruck als gemischter Bruch zu lesen. Wenn hier die Multiplikation der beiden Zahlen gemeint ist, muss man ausdrücklich ein Multiplikations-Zeichen schreiben.

Wenn wir das noch genauer wissen wollen, müssen wir unser Stellensystem erweitern. Beim Zählen haben wir uns nur überlegt, dass die Stellen nach links immer mehr wert werden. Aber man kann das gleiche auch nach rechts machen. In diese Richtung werden die Stellen entsprechend immer weniger wert. Wir nennen diese Stellen rechts der Einerstelle die Nachkommastellen. 2/5 rechnen wir also wie 20/5 und erhalten 4, denn 4*5=20. Diese vier schreiben wir durch ein Komma getrennt rechts von der Einerstelle und erhalten also 12/5 = 2,4 . Alles zusammen genommen, nennt man das Verfahren "schriftliches Dividieren" und das Ergebnis ist ein Dezimalbruch.

```
12:5=2 2/5
10
 2
```

```
12,0:5=2,4
10
 20
 20
  0
```

Wenn das Ergebnis einer Division von Ganzen Zahlen wieder eine Ganze Zahl ist, sagt man die zweite Zahl ist *Teiler* der ersten. Eine Natürliche Zahl, die außer sich selbst und 1 keine Natürlichen Zahlen als Teiler hat, nennt man *prim* oder eine *Primzahl*. Jede Natürliche Zahl lässt sich eindeutig in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen. Das ist nützlich beim Kürzen von Brüchen.

12 = 2*2*3

6.1 Verhältnisse

Die Aussage von eben, dass mit benötigten 15 Körben Äpfeln und vorhandenen 12 Körben noch 3 fehlen, lässt sich mit Hilfe der Division noch auf andere Art deuten, nämlich als der Anteil, zu dem unser Lager schon gefüllt ist: Wir können auch rechnen, dass das Lager zu 12/15 gefüllt ist. Wenn man nun weiß, dass sowohl die 12 als auch die 15 durch 3 teilbar sind, kann man diesen Bruch kürzen. Wichtige Rechenregeln sind hier, dass die Multiplikation kommutativ ist, dass man also die beiden Operanden vertauschen kann, sowie dass ein Bruch, bei dem Zähler und Nenner gleich sind, 1 ergibt.

$$12/15 = \frac{3*4}{3*5} = 3/3 * 4/5 = 1 * 4/5 = 4/5$$

Das Lager ist also zu 4/5 gefüllt.

> Bruchstriche bei einfachen Brüchen schreibt man gern schräg, um Platz zu sparen. Mathematisch unterscheiden sie sich nicht von den waagerechten Bruchstrichen. Auch die Schreibweise mit ÷ oder : ist mathematisch das Gleiche.

Solche Verhältnisse schreibt man gern auch als Komma-Zahl. Wir berechnen also den Dezimalbruch ähnlich wie oben und erhalten

4/5 = 40/5 / 10 = 0,8

6.2 Prozent

Solche Verhältnisse schreibt man nun wieder gern als Prozent. Dazu erweitert man den Dezimalbruch mit 100 und schreibt die 100 im Nenner als Prozentzeichen[2]:

0,8 = 0,8 * 100/100 = 0,8*100 % = 80%

Wir können also sagen: Das Lager ist zu 80 % gefüllt.

Das Gleiche ist bei kleineren Werten auch mit 1000 üblich, was man dann Promille ("pro tausend") nennt und als ‰ schreibt:

0,8 = 0,8 * 1000 ‰ = 800 ‰

Oder bei noch viel kleineren Zahlen auch mit Millionen als "parts per million" *ppm* oder Milliarden "parts per billion" *ppb*.

> Beachte hier die englische Bedeutung von "billion" = Milliarde!

In der HF-Elektronik wird z. B. die Genauigkeiten von Frequenznormalen oder Quarzen so angegeben.

Die herleitende Erklärung der Prozentrechnung kann man auch zum Berechnen im Alltag nutzen:

x Prozent von y ist eine Multiplikation, und diese ist kommutativ. Man kann also die Reihenfolge vertauschen:

5 % von 120 V = 120 * 5 / 100 V = 1,2 * 5 V = 6 V

In vielen Fällen findet man so eine Reihenfolge, die im Kopf leichter zu berechnen ist.

Um eine Prozentangabe rückgängig zu machen, muss die entsprechende Multiplikation umgekehrt werden, also eine Division angewendet werden. Um von einem Bruttopreis den Nettopreis zu berechnen, geht man wie folgt vor:

2 lateinisch für "pro Hundert"

1234 € brutto abzüglich 19% USt = 1234€ / (119/100) =
= 1234€ / 1,19 = 1037 € netto

Beachte dabei, dass der Bruttopreis die 100% vom Nettopreis plus die 19% UST sind, also in Summe 119% angesetzt werden müssen.

6.3 Unendliche Dezimalbrüche

Nicht alle Rationalen Zahlen lassen sich exakt als Dezimalzahlen schreiben. Das einfachste Beispiel ist wohl 1/3.



> Beim Programmieren muss man beachten, dass sich auch nicht alle Dezimalzahlen exakt als binäre Zahlen schreiben lassen. Schon ein simples 0,1 ist aus diesem Grund ein Problem. Es empfiehlt sich daher, bei Vergleichen von Zahlen nicht auf exakte Gleichheit zu prüfen, sondern auf das Unterschreiten einer minimal zulässigen Rundungsabweichung. Je nach Aufgabe gibt es auch andere Möglichkeiten.

Man kann sich behelfen, indem man die Zahl einfach als Bruch stehen lässt, die Dezimalzahl ungefähr angibt, oder die sich wiederholenden Stellen mit einem Überstrich („Periodenstrich“) markiert, also:

$1/3 = 0{,}\overline{3} \approx 0{,}333$

> Wenn man einmal exakt rechnen möchte, lässt sich die Darstellung mit dem Periodenstrich einfach wieder in einen Bruch umrechnen, indem man die sich wiederholenden Ziffern durch die gleiche Anzahl von Ziffern Neun teilt:
>
> $0{,}\overline{45} = 45/99 = 5/11$

Während man in der Mathematik gern bei den exakten Zahlen bleibt, wird in der Technik lieber gerundet.

2,2746…	~= 2,27
2,275	~= 2,28
2,2798…	~= 2,28

Abb. 3: Runden

> Die übliche Art zu runden ist die Kaufmännische Rundung. Dabei wird im halboffenen Intervall von [-5 ; +5) zur mittleren Zahl gerundet. Die +/-5 bezieht sich dabei auf die erste Stelle, die nach dem Runden wegfallen soll.
>
> Weitere übliche Rundungsarten sind Abrunden (immer zur nächst kleineren Zahl), Aufrunden (immer zur nächst größeren) und das simple Abschneiden der nicht benötigten Stellen. Seltener benutzt wird das „Mathematische Runden“.
>
> Grundsätzlich sollte man innerhalb einer Rechnung eine Zahl nur einmal runden. Normalerweise wird nur das Endergebnis gerundet.
>
> Welche Art zu Runden die richtige ist, hängt von der Aufgabe ab.

Da die meisten Zahlen, mit denen wir in der Elektronik zu tun haben, sowieso aus Messungen kommen, die nur eine beschränkte Genauigkeit haben oder von Bauteilen mit beschränkter Toleranz, hätten Rechnungen mit exakten Zahlen keinen Vorteil. Die Ergebnisse werden auf eine bestimmte Anzahl von Stellen gerundet.

Wenn man beim Addieren nicht aufpasst, fallen sehr kleine Werte gegenüber sehr großen unter den Tisch. Beim Programmieren von Schleifen kann es daher zu schwer auffindbaren Fehlern kommen. Addiert man z.B. zu 5e9 in einer Schleife immer wieder 1 dazu bis der Wert 5.1e9 erreicht ist, möchte man erwarten, dass das nach 1e8 Schleifendurchläufen geschafft ist. Je nach gewähltem Typ für die Variablen steckt das Programm aber einer Endlosschleife fest, weil mit Rundung 5e9 + 1 = 5e9 gelten kann.



Nun haben wir also alle Grundrechenarten zusammen. Vom einfachen Zählen mit Strichlisten sind wir über die Zahlen zum Addieren gekommen. Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion. Damit haben wir die negativen Zahlen und die Ganzen Zahlen erhalten. Die Multiplikation vereinfacht die gleichartige mehrfache Addition. Die Umkehrung der Multiplikation ist die Division. Diese bringt uns die Rationalen Zahlen.

7 Rechenregeln

Bei komplizierter zusammengesetzten Berechnungen muss man Konventionen beachten. Die wichtigste ist die Regel, dass Multiplikationen und Divisionen ihre Operanden stärker binden als Addition und Subtraktion. Multiplikationen und Divisionen werden also vor Addition und Subtraktion ausgeführt. Ansonsten wird von links nach rechts gerechnet. Wenn dies einmal nicht gewünscht ist, kann die richtige Reihenfolge mit Klammern vorgegeben werden.

3*4 + 5 = 17

3* (4+5) = 27

Die zweite Berechnung kann man auch mithilfe des Distributivgesetzes ausführen. Dieses besagt, dass sich eine Multiplikation sozusagen auf die nachfolgende Addition „verteilt“:

3* (4+5) = 3*4 + 3*5 = 12 + 15 = 27

In Programmiersprachen ist die Reihenfolge der Operatoren genau festgelegt und folgt weitestgehend der mathematischen Konvention, dass „höhere“ Funktionen stärker binden als einfachere.



Mithilfe des Distributivgesetz kann man sich z.B. auch die Binomischen Formeln selbst herleiten.

Beim Addieren von Brüchen bringt man diese erst auf einen gemeinsamen Nenner. Am einfachsten geht das, indem man sie über Kreuz mit dem Nenner des anderen erweitert.

2/3 + 4/5 = 2/3 * 5/5 + 4/5 * 3/3 =2*5/15 + 4*3/15 = (10+12)/15 =22/15

Es ist aber sinnvoll, zu prüfen, ob man nicht leichter auf das *kleinste gemeinsame Vielfache kgV* erweitern kann.

7.1 Führende Nullen

In einer Kommazahl können rechts vom Komma am Ende stehende Nullen weggelassen werden (sofern sie nicht unter einem Periodenstrich stehen). Ebenso können links vom Komma führende Nullen weggelassen werden (aber niemals Nullen, die zwischen anderen Ziffern stehen!). Man nennt diese Nullen auch "leading (bzw trailing) zeros" oder auf deutsch „führende Nullen". Umgekehrt ist es manchmal nützlich, sich zu denken, dass sie doch da sind oder sie sogar hinzuschreiben, z.B. um beim schriftlichen Addieren oder Multiplizieren mit den Stellen nicht durcheinander zu kommen:

```
 0045,347          327*64
+3278,200           19620
=3323,547           01308
                    20928
```

> Es ist üblich, Ergebnisse nur so genau anzugeben, wie auch die ursprünglichen Werte waren. Die Multiplikation sollte man hier also zu 209,3 runden. Besonders beim Arbeiten mit dem Taschenrechner ist darauf zu achten. Eine Angabe übertrieben vieler Nachkommastellen kann als Fehler gewertet werden.

8 Potenzen

Bis hier ließen sich alle Operationen durch sehr simple Fragen des täglichen Lebens veranschaulichen, die vermutlich schon unsere Vorfahren vor tausenden von Jahren gestellt haben. Kommen wir nun zu etwas Weiterführendem, was wir vielleicht nicht im täglichen Leben, aber doch in Elektronik und Amateurfunk brauchen.

Betrachten wir eine Verstärkerstufe, die ihr Signal um den Faktor 8 verstärkt. Weil uns das nicht reicht, schalten wir 3 solche Verstärkerstufen hintereinander. Wir erhalten also eine Gesamtverstärkung von $8 * 8 * 8 = 512$. Das kommt uns bekannt vor. Durch eine ähnliche Zusammenfassung gleichartiger Additionen sind wir von der Addition zur Multiplikation gekommen. Die Zusammenfassung gleichartiger Multiplikationen nennt man Potenzierung. Um auszudrücken, dass wir dreimal mit 8 multiplizieren wollen, schreiben wir mithilfe einer Hochzahl: 8^3 . Die 8 nennt man die Basis und die 3 den Exponenten.

Das Wort Basis ist uns schon einmal begegnet. Gleich zu Anfang beim Stellensystem der Zahlen. Das ist kein Zufall. Mithilfe der Potenzen zur Basis unseres Stellensystems können wir die Wertigkeit der einzelnen Stellen beschreiben. Wir hatten anfangs festgelegt, dass der Wert immer durch Multiplikation mit der Basis steigt, je weiter wir nach links gehen. Das ist genau die wiederholte Multiplikation mit der Basis. Eine große Zahl wie z. B. 1000 ist eine 1 die dreimal um eine Stelle nach links geschoben wurde, deren Wert also bei jeder Verschiebung mit der Basis 10 multipliziert wurde:

$1000 = 1 * 10 * 10 * 10 = 10^3$

Das lässt sich auch nutzen, um andere Zahlen, die nicht so „rund" wie 1000 sind, kurz aufzuschreiben. Nehmen wir z. B. 470.000 . Wir schieben das Komma von (anfangs „unsichtbar", also nicht geschrieben, rechts von der 0 der Einerstelle) bis vor die Stelle mit dem höchsten Wert, hier also der 4. Und als Ausgleich multiplizieren wir mit der entsprechenden Potenz von 10.

470.000 = 4,70000 * 100.000 = $4{,}7 * 10^5$

Im Deutschen wird das Komma benutzt, um die Einerstelle zu markieren und ein Punkt um jeweils drei Stellen zu gruppieren. Im englischen Sprachraum ist es genau umgekehrt. Auch beim Programmieren werden Zahlen meist mit einem Dezimal-Punkt geschrieben. Dreiergruppen werden beim Programmieren gar nicht benutzt.

25.489,83 deutsch = 25,489.83 englisch

8.1 Wissenschaftliche Schreibweise

Die Schreibweise $4{,}7 * 10^5$ nennt man „wissenschaftliche Schreibweise“. Sie wird auch in der Technik gern benutzt. Durch die 10er-Potenz hat man gleich ein Gefühl dafür, wie groß die Zahl ist. Man nennt sie daher auch „Größenordnung“.

Über diese Größenordnung kann man auch leicht das Ergebnis einer Aufgabe abschätzen. Man betrachtet nur die Zehnerpotenzen und erhält eine grobe Vorstellung davon, in welcher Größenordnung das Ergebnis liegen muss. So kann man manche Rechenfehler vermeiden.



Diese Schreibweise sieht aus wie eine Rechenaufgabe, aber sie wird wie eine Zahl benutzt. In vielen Programmiersprachen schreibt man diese Zahl mithilfe des Buchstaben E als Abkürzung für "*10^" auch als 4.7E5 (beachte hier den Dezimalpunkt!).

Beim Programmieren schiebt man den Dezimalpunkt oft auch noch eine Stelle weiter nach links und lässt dann die Null der Einerstelle weg, also .47E6 . Im technischen Rechnen ist das dagegen unüblich.

Beachte, dass dieses E hier nichts mit den E-Reihen der passiven elektronischen Bauteile zu tun hat!



In der Technik geht man noch einen Schritt weiter und gibt jeder durch 3 teilbaren 10er-Potenz einen Kennbuchstaben, ein sogenanntes SI-Präfix, wie z.B. das µ[3] für *Mikro*. Hier verschiebt man das Komma also nicht bis ganz nach links, sondern nur bis zur nächsten durch 3 teilbaren Potenz:

1e-6	µ
1e-3	m
1e3	k
1e6	M

Abb. 4: SI-Präfixe

470,000 * 1.000 = 470 k

Wichtig ist hier zu beachten, dass man diese Schreibweise nur benutzen sollte, wenn die Zahl auch mit einer Einheit versehen ist, also z. B. 470 kΩ[4].

3 griechischer Buchstabe: Das kleine My
4 griechischer Buchstabe: Das große Omega

Beachte, dass das alles nur Schreibweisen von Zahlen sind. Man kann ganz normal mit ihnen rechnen und es gelten die normalen Rechenregeln.

470.000 = $4{,}7 \cdot 10^5$ = 4.7e5 = 470k

Zwischen 10^{-3} und 10^3 gibt es für jede Zehnerpotenz ein SI-Präfix. Hier gilt besonders, dass nicht alle überall gebräuchlich sind. *Hekto h* für Hundert kennt man z.B. von *Liter l* oder auch *Pascal Pa*[5]. Und das *Deka-Gramm Dag* ist nur in Österreich gebräuchlich.



In der IT sind nicht die Vielfachen der 3. Potenz von 10 die üblichen Faktoren, sondern die der 10. Potenz von 2. Zur Unterscheidung wird dem Kennbuchstaben ein i angehängt.

4 TiB = $4 \cdot 2^{30}$ Byte = 4,3 TB

Die Unterscheidung wird in der Werbung aber nicht immer ganz sauber getroffen.

9 Umkehrung der Potenz

Bei den Grundrechenarten Addition und Multiplikation lassen sich die Operanden vertauschen. Bei Subtraktion und Division ergibt sich bei Vertauschung das jeweilige sogenannte Inverse, also eine Zahl die noch in einer Art Beziehung zur ursprünglichen Zahl steht. Bei der Potenz ist das anders. Basis und Exponent verhalten sich völlig unterschiedlich. Wir müssen also unterscheiden, was genau wir umkehren wollen.

10 Wurzel

Wenn der Exponent die Operation beschreibt, ist die Umkehrung die Wurzel. Um also zu berechnen, wie wir mit 3 Verstärkerstufen auf eine Gesamtverstärkung von 512 kommen, berechnen wir die 3. Wurzel aus 512 und erhalten 8.

$$8^3 = 512$$

Umkehrung über den Exponenten:

$$8 = \sqrt[3]{512}$$

In der Funktechnik werden wir häufig die 2. Wurzel brauchen. Weil sie die Umkehrung von „hoch 2“ ist, also der Quadrierung, nennt man sie auch Quadratwurzel. Auch wenn einfach nur von „Wurzel aus“ gesprochen wird, ist meist die Quadratwurzel gemeint.

10.1 Reelle Zahlen

Es gibt Quadratwurzeln, die sich nicht als *Rationale Zahl* schreiben lassen. Das einfachste Beispiel dafür ist $\sqrt{2}$. Solche Zahlen nennt man *Irrationale Zahlen*. Rationale und Irrationale Zahlen bilden gemeinsam die Reellen Zahlen. Dies nur der Vollständigkeit halber. Für Elektronik und Funktechnik ist

5 SI-Einheit für Druck nach dem Franzosen Blaise Pascal

das nicht weiter wichtig. Hier gilt das gleiche, was oben schon bei den unendlichen Dezimalbrüchen über das Runden gesagt wurde.

> Diese Gruppierungen von Zahlen nennt man *Mengen*. Interessant ist dabei, dass alle hier erwähnten Mengen unendlich groß sind, sich diese „Unendlichkeiten" aber in ihrer *Mächtigkeit* unterscheiden. Man spricht von abzählbaren Unendlichkeiten wie die Ganzen Zahlen und den überabzählbaren Unendlichkeiten wie die Reellen Zahlen.



10.2 Imaginäre und Komplexe Zahlen

Es gibt keine Zahl, die quadriert eine negative Zahl ergibt, also kann man aus negativen Zahlen keine Quadratwurzel ziehen. Es gibt aber gerade in der Hochfrequenz-Elektronik viele Berechnungen, die genau solche Quadratwurzeln erfordern:

Die Bedingung dafür, dass ein Schwingkreis schwingt ist, dass seine Resonanzkreisfrequenz ω_0 groß ist gegen seine Dämpfung δ[6].

$$\omega_e{}' = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Das führt dann aber genau dazu, dass die Wurzel negativ wird. Die Kreisfrequenz ω[7] ist also eigentlich eine Wurzel aus einer negativen Zahl (unter der Annahme, dass die Dämpfung klein ist).

Man behilft sich mit der Rechenregel, dass man aus Produkten die Wurzel getrennt ziehen kann. Man schreibt die negative Zahl als die entsprechende positive mal -1. Aus der positiven zieht man ganz normal die Wurzel und der *Wurzel aus -1* gibt man einen Namen: *imaginäre Konstante* und kürzt diese mit i[8] ab.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 * -1} = \sqrt{4} * \sqrt{-1} = 2i$$

So bringt uns die Wurzel zu den imaginären und komplexen Zahlen, die in der Elektrotechnik eine große Rolle spielen. Mathematisch sind z.B. die Widerstände von Kapazitäten und Induktivitäten imaginäre Zahlen.

> Weil unter der praxisnahen Annahme, dass in einem guten Schwingkreis die Dämpfung vernachlässigbar klein ist, dann alles imaginär ist, kann man das i dann auch konsequent überall weglassen. Die Kreisfrequenz ω wird uns kaum jemals als imaginäre Zahl begegnen.

Die Summe aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl nennt man komplexe Zahl. So eine komplexe Zahl kann z. B. den Gesamtwiderstand aus einem ohmschen Widerstand und einer Induktivität beschreiben.

6 griechischer Buchstabe: Das kleine Delta
7 griechischer Buchstabe: Das kleine Omega
8 in der Elektrotechnik oft auch j, weil das i für die Stromdichte benutzt wird

Wegen der Nicht-Eindeutigkeit der Quadratwurzel wird das i genauer wie folgt definiert:

$i^2 = -1$

Würde man die Zerlegung einer Wurzel in Produkten mit negativen Zahlen konsequent anwenden, bekäme man widersprüchliche Ergebnisse, z.B. wie folgt:

Das Folgende ist falsch:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1 * -1} = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = \sqrt{-1}^{\,2} = -1$$

Die Wurzel ist also die eine Umkehrung der Potenz und bringt uns als Erweiterung die Komplexen Zahlen.

11 Logarithmus

Einleitung vom vorigen Kapitel: „Wenn der Exponent die Operation beschreibt, ist die Umkehrung die Wurzel.“

Wenn dagegen bei einer Potenz die Basis die Operation beschreibt, die umgekehrt werden soll, ist diese Umkehrung der Logarithmus. Um zu berechnen, wie viele Verstärkerstufen mit Verstärkung 8 wir brauchen, um eine Verstärkung von 512 zu erhalten, berechnen wir den Logarithmus zur Basis 8 von 512 und erhalten 3. Aus der Basis der Potenz wird also die Basis des Logarithmus:

$8^3 = 512$

Umkehrung über die Basis:

$3 = \log_8 512$

In der Technik werden wir häufig den Logarithmus zur Basis 10 brauchen. Anschaulich gesagt berechnet man damit, wie viele Stellen eine Zahl hat. Mithilfe dieses sogenannten "dekadischen Logarithmus" erhalten wir also die Größenordnung einer Zahl:

$\log_{10} 470.000 \approx 5,67$

Die Zahl von oben braucht also aufgerundet 6 Stellen. Abzüglich der einen, die man vor das Komma schreibe, kann man also auch $4,7 * 10^5$ schreiben. Der Logarithmus kürzt also das schrittweise Verschieben vom Komma ab.

11.1 Bel und dB

In der Messtechnik wird der dekadische Logarithmus benutzt, um das Bel[9] zu definieren.

9 nach dem Schotten *Alexander Graham Bell*

Ein Bel ist der dekadische Logarithmus des Verhältnisses zweier Leistungen.

Das Bel vergleicht also die Größenordnung, also die ungefähre Stellenzahl der beiden Leistungen. Deshalb sind Werte in Bel meistens recht klein. Aus diesem Grund spricht man allgemein nur von Dezi-Bel dB mit 1dB = 0,1 Bel. Hier sieht man ein Beispiel dafür, dass die dekadischen Vorsilben nur so benutzt werden, wie sie allgemein gebräuchlich sind. Das *Bel* wird praktisch nur zusammen mit *Dezi* benutzt.

Ansonsten werden in der Technik überwiegend nur die durch 3 teilbaren 10er-Exponenten genutzt. Und auch hier wird nicht für jede physikalische Größe jede Vorsilbe genutzt. So werden z.B. Kondensatoren typischerweise maximal in µF angegeben.

In der Messtechnik stehen uns nur selten echte Leistungs-Messgeräte zur Verfügung. Leichter zu messen sind Spannungen. Und wir arbeiten meist an konstanter Impedanz. Gemäß dem Leistungsgesetz und dem Ohmschen Gesetz geht der Strom *linear* mit der Spannung, das bedeutet: Wird die Spannung mit einem Faktor n multipliziert, so ändert sich auch der Strom durch Multiplikation mit n. In diesem Fall ändert sich die Leistung wie folgt:

P1 = U I

P2 = n*U n*I

P2/P1 = $\frac{n*U \;\; n*I}{U\,I} = n^2$

Gemäß der Rechenregeln für Logarithmen entspricht dieses Quadrat genau einem Faktor 2 beim Dezibel.

$\log (n^2) = \log (n*n) = \log n + \log n = 2 \log n$

Logarithmen von Spannungs-Verhältnissen muss man also mal 2 rechnen, um dB zu erhalten. Aus der Potenz wird also ein Faktor. Das ist der andere Vorteil der Logarithmen: Neben der Veranschaulichung der Größenordnung einer Zahl vereinfacht er auch das Rechnen. Aus dem Multiplizieren der Verstärkungen wird das Addieren der Dezibel-Werte.

Eine Verstärkung von 8 in dB: $10 * \log_{10} 8 = 9$dB

Drei solcher Verstärker hintereinander: $8^3 = 3 * 9$dB = 27dB

Gegenprobe: $10 * \log_{10} 8^3 = 27$dB

Wichtig ist dabei zu beachten, dass die Verstärkung einer Verstärkerstufe schon das Verhältnis zweier Leistungen ist, nämlich Ausgangsleistung zu Eingangsleistung.

Der dekadische Logarithmus bildet die Anzahl der Stellen als die Zahl vor dem Komma ab. Der genaue Wert innerhalb der 10er-Potenz ist in den Nachkommastellen wiedergegeben. Beim Dezibel verschiebt sich das wegen dem Faktor 10 um eine Stelle.

log 123 = 2,**0899** → 20,899 dB
log 456 = 2,**6589** → 26,589 dB

Alle Verstärkungsfaktoren in den Hundertern haben also nach dem Logarithmus eine 2 vor dem Komma und beim Dezibel einen Wert in den 20ern.

log 1230 = 3,**0899** → 30,899 dB
log 4560 = 3,**6589** → 36,589 dB

Wird der Verstärkungsfaktor um den Faktor 10 größer, ist also nun in den Tausendern, so wird beim Logarithmus aus der 2 eine 3; die Nachkommastellen bleiben gleich.

Das ergibt sich auch aus der Rechenregel, dass der Logarithmus aus der Multiplikation eine Addition macht:

log 123 = log (100 *** 1,23**) = log 100 **+ log 1,23** = 2 **+ 0,0899**
log 1230 = log (1000 *** 1,23**) = log 1000 **+ log 1,23** = 3 **+ 0,0899**

11.2 Pegel

Weil das Rechnen mit dem dB so bequem ist, wird es auch gern zur Angabe von *Pegeln* benutzt. Dies macht man dann durch einen kleinen Kennbuchstaben kenntlich. In der Funktechnik wird häufig 1mW als Bezugspegel benutzt. Der Kennbuchstabe dafür ist m.

Ein Wert in dB*m* gibt also an, um wie viel dB man 1*m*W verstärken müsste, um den Pegel zu erhalten, z. B.:

P = 6,7dBm = 1mW * 6,7dB = 1mW * 6,7/10 Bel = 1mW * $10^{(0,67)}$ = 4,7mW

Gegenprobe:

V = 10 $\log_{10}$ (4,7mW / 1mW) = 6,7dB

Beachte, dass der Logarithmus nicht für Werte geeignet ist, die Null oder negativ werden können.

11.3 E-Reihen

Ein weiterer Einsatzzweck von Logarithmen sind die sogenannten E-Reihen der passiven Bauelemente. Die Genauigkeit bzw. umgekehrt die Toleranz der Bauelemente wird als prozentuale Abweichung definiert, was letztlich einen Faktor bedeutet. Ein Widerstand mit einem Nennwert von 1 kΩ mit einer

Toleranz 20 % kann also z. B. maximal 1,2 kΩ haben, also 200 Ω mehr. Ein Widerstand aus der gleichen Reihe mit einem Nennwert von 100 kΩ hat maximal 120 kΩ, also 20 kΩ mehr. Es würde also keinen Sinn ergeben, sie mit einer festen Differenz von Nennwerten herzustellen. Stattdessen fertigt man sie mit einem festen Faktor von einem Nennwert zum nächsten. Diese Faktoren werden umgerechnet in Anzahl von Nennwerten pro Dekade. Die Reihe E3 hat also 3 Werte pro Dekade und die Reihe E6 hat 6 Werte pro Dekade.

Ausgehend von einem Wert K sollen E mal Faktor F den zehnfachen Wert von K ergeben:

$K * F^{E} = 10 K$

Das K lässt sich kürzen und wir erhalten:

$$F = \sqrt[E]{10}$$

Gegenprobe mit E=3

$$K * \sqrt[3]{10} * \sqrt[3]{10} * \sqrt[3]{10} = K * \left(\sqrt[3]{10}\right)^3 = 10\,K$$

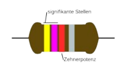


Abb. 5: Farbcode

Für die E3 ist F also $\sqrt[3]{10}$ ≈ 2,2 und wenn man das ausgehend von 1 kΩ ausrechnet, erhält man die Nennwerte 1 kΩ 2,2 kΩ 4,7 kΩ und dann schließlich 10 kΩ wo sich das ganze eine Dekade höher wiederholt. Die mit den üblichen Rundungsregeln ausgerechneten Werte decken sich aus verschiedenen praktischen Gründen nicht genau mit den Werten, die in den E-Reihen vereinbart sind.

Die Farbcodes auf den Widerständen entsprechen der wissenschaftlichen Schreibweise. Die ersten Ringe sind die signifikanten Stellen, dann folgt die Zehnerpotenz. Aber beachte, dass beim Farbcode kein Komma enthalten ist. Zusätzlich folgt noch die Angabe der Genauigkeit, was in der Technik oft üblich ist.

♫

Kleiner Exkurs in die Musik: Da für das Gehör Frequenz-Verdopplungen wichtig sind, macht man hier das gleiche, nur mit Faktor 2 anstelle von 10. Auf dem Klavier sind die 7+5=12 Halbtonschritte gleichmäßig über die so genannte Oktave verteilt:

$K * F^{12} = 2 K$

$F = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$

Der Tonabstand eines Halbtonschritts ist also ungefähr der Faktor 1,059 und mit dem 13. Halbtonschritt erreicht man eine Frequenzverdopplung.

Diesen Zusammenhang mit der Vervielfachung der Frequenz nennen wir in der HF-Technik *Oberwellen*.

Da das Alphabet nicht beliebig viele Buchstaben hat, müssen wir damit leben, dass nicht jeder Buchstabe immer das gleiche bedeutet. Wir hatten schon das E in der wissenschaftlichen Schreibweise beim Programmieren und nun bei den E-Reihen. Außerdem wird es auch gern in Formeln für Energie benutzt.

Wir müssen also immer darauf achten, welche Buchstaben in Formeln was bedeuten. Es empfiehlt sich die Buchstaben selber wie üblich zu benutzen, sich aber umgekehrt nicht blind darauf zu verlassen, dass andere das tun. Beim Programmieren nennt man das die „Defensive Arbeitsweise“.

11.4 Logarithmische Skala

Obwohl wir die Werte mithilfe von Wurzeln ausgerechnet haben, nennt man so eine Skala logarithmisch. Weil sich die Messgenauigkeit und andere technische und physiologische Zusammenhänge ähnlich verhalten findet man so eine Skala sehr häufig auch bei der Darstellung von Messwerten. Grafisch aufgetragen erkennt man sie daran, dass die Dekaden konstante Breiten haben. Und diese Positionen auf der Skala sind eben wieder genau die Logarithmen der ursprünglichen Werte.

11.5 Logarithmen-Basis umrechnen

In den Naturwissenschaften begegnet uns oft der sogenannte *Natürliche Logarithmus.* (Der hat nichts mit den natürlichen Zahlen zu tun.) Er ist die Umkehrung der e-Funktion, eine Potenz, deren Basis die Euler[10]'sche Zahl e ≈ 2,7 ist.

10 nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler

Die besondere Bedeutung der Euler'schen Zahl e ist, dass die Steigung von e^x an jeder Stelle genau gleich dem Funktionswert ist. Wegen dieser besonderen Eigenschaft begegnet uns der Natürliche Logarithmus in Mathematik und Naturwissenschaften sehr häufig, während wir in der Technik fast nur den Dekadischen Logarithmus benutzen.

Manche wissenschaftlichen Taschenrechner kennen deswegen nur diesen Logarithmus. Hier hilft eine Rechenregel für Logarithmen:

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

Wir können also jeden beliebigen Logarithmus (hier zur Basis a) ausrechnen, wenn wir wenigstens einen (hier den zur Basis c) haben. Anders gesagt: Wenn man diese Rechenregel konsequent anwendet, muss man gar nicht wissen welche Basis der Logarithmus hat, der einem zur Verfügung steht.

Mit dem Logarithmus haben wir die andere Art, die Potenz umzukehren. Wir haben einiges über unser Stellensystem der Zahlen erfahren. Dazu bringt der Logarithmus uns das Dezibel.

11.6 Rekapitulation

Bevor wir nun weitermachen, fassen wir die bisherigen Erkenntnisse noch mal zusammen, und schauen uns an, was das für unsere Zahlen bedeutet.

Zahlen gehören zu einem Stellensystem. Üblicherweise wird im 10er („dekadischen") System gerechnet. Diese 10 ist die Basis des Stellensystems. Der Wert einer Stelle ist eine Potenz mit dieser Basis, und zwar entspricht der Exponent der Position der Stelle. Die Einerstelle hat dabei den Exponent 0. Für jede Basis gilt, dass die 0-te Potenz 1 ist. Die größeren Stellen links haben positive Exponenten und die Nachkommastellen negative.

	← mal 10				geteilt durch 10 →		
Stelle	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
Zahl	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
Exponent	3	2	1	0	-1	-2	-3
		↓ Potenz „10 hoch ..."			↑ Logarithmus „$\log_{10}$ ..."		
Potenz	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Name	kilo	hekto	Deka		dezi	centi	milli
Kürzel	k	h	D		d	c	m

Der Logarithmus ist die Umkehrung der Potenz, die uns zum Wert einer jeden Stelle ihren Exponenten ergibt. Dieser Zusammenhang wird zum einen bei der wissenschaftlichen Schreibweise genutzt, und zum anderen bei der Rechnung mit Dezibel.

1000 W = 10^3 W = 1 kW = 30 dBW

Addition und Subtraktion

Längere Zahlen werden von rechts stellenweise addiert, dabei werden sie am Dezimalkomma ausgerichtet und der Übertrag jeweils nach links übernommen. Die Subtraktion ist das gleiche wie die Addition des Negativen.

Bei der wissenschaftlichen Schreibweise muss man beachten, dass das Komma unter Beachtung der Zehnerpotenz korrekt gesetzt wird.

$2{,}34 \cdot 10^4 + 3{,}45 \cdot 10^3 = 2{,}34 \cdot 10^4 + 0{,}345 \cdot 10^4 = 2{,}685 \cdot 10^4$

Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier Zahlen wird jede Ziffer der einen Zahl mit jeder der anderen Zahl multipliziert, und dann die Ergebnisse stellenrichtig aufaddiert. Die Anzahl der Nachkommastellen addiert sich dabei.

Für den Fall, dass sich die kleinste Stelle dabei zu null ergibt, muss diese dabei mitgezählt werden. Diese „trailing zero“ darf ggf. erst danach gestrichen werden.

1,24 * 2,345 = 2,90780 = 2,9078

12 Notationen

Mathematische Operationen können verschieden geschrieben werden. Die übliche Schreibweise für die Grundrechenarten, das Operator-Zeichen zwischen die Operanden zu schreiben, nennt man *infix*. Vom Programmieren kennen wir die Schreibweise für Funktionen, bei der vorn der Name der Operation steht und dahinter in Klammern die Operanden. Kombiniert man das, gibt den Operatoren also Zeichen und schreibt diese aber hinter die Operanden, so erhält man die bei manchen technischen Taschenrechnern benutzte *Umgekehrt-Polnische Notation* *UPN*. UPN war unter Technikern recht beliebt, weil sie ohne Klammern auskommt, die besonders beim Tippen auf dem Taschenrechner lästig sein können.

In der Mathematik gibt es noch Notationen, bei denen die Operation durch eine besondere Schreibweise dargestellt wird. Die einfachste (und deswegen kaum als besondere Notation wahrgenommene) derartige Notation ist wohl der waagerechte Bruchstrich, die bekannteste wahrscheinlich das Wurzelzeichen. Auch Hoch- und Tiefstellungen gehören hierzu.

Grundsätzlich gilt, dass alle Notationen nur auf Konventionen beruhen; die mathematische Aussage ändert sich nicht, wenn wir die Notation wechseln.

$$\underbrace{4{,}5 * 7{,}3}_{infix} = \underbrace{multiply(4.5, 7.3)}_{Funktion} = \underbrace{4{,}5 \;\; 7{,}3 \;\; x}_{UPN}$$

Man sollte nach Möglichkeit bei der üblichsten Notation bleiben.



> Beim Programmieren muss man z.B. in Java damit leben, dass zusätzlich über Klassen eingeführte mathematische Datentypen wie z.B. für Brüche nicht die Infix-Notation benutzen können. Wir müssen also zur Funktionen-Notation wechseln.

13 Rechnen mit Variablen

Wenn man eine Rechenaufgabe zu lösen hat, deren Ergebnis sich nicht sofort in Zahlen aufschreiben lässt, kann man dem gesuchten Ergebnis erst mal einen Namen geben. Als Namen verwendet man meistens einzelne (lateinische oder griechische) Buchstaben, die man Variable nennt. Einfaches Beispiel (welches man natürlich auch gleich in Zahlen hätte aufschreiben können):

Eine Leistung von 50 Watt[11] muss mit einer Schaltung aus Widerständen abgeleitet werden, die jeweils mit maximal 3W belastbar sind. Wie viele Widerstände werden benötigt?

$50W / n = 3W$

Durch sogenannte äquivalente Umformungen kann n ermittelt werden. Sie heißen äquivalent, also „gleichwertig“, weil sich zwar die Schreibweise der Formel ändert, aber nicht ihre Aussage. Äquivalent sind Umformungen genau dann, wenn man auf der rechten und der linken Seite vom Gleichheitszeichen genau das gleiche macht. Das was man macht, schreibt man oft rechts neben die Formel hinter einen | .

$$50W / n = 3W \qquad | :3W$$

$$<=> \qquad \frac{50\,W}{3\,W * n} = 3W / 3W$$

$$<=> \qquad \frac{50}{3 * n} = 1 \qquad | *n$$

$$<=> \qquad \frac{50 * n}{3 * n} = 1*n$$

$$<=> \qquad n = 50/3 = 16\ 2/3$$

Wir erhalten also das erwartete Ergebnis von 50/3. Aufgerundet benötigen wir also 17 Widerstände, um die Leistung von 50W ohne Überlastung der Widerstände abzuleiten.

Hier haben wir also ein Beispiel, wo Aufrunden die richtige Rundungsart ist. Wenn ich dagegen beispielsweise ausrechnen will, wie viele Bausätze ich mit 14 Transistoren bestücken kann, wenn ich pro Bausatz 3 Stück brauche, ist Abrunden die richtige Rundungsart, weil letztlich nur vollständige Bausätze zählen.

11 nach dem Schotten *James Watt*

Die Gleichheit ist wie die Multiplikation kommutativ („gleich ist gleich“). Aber wie auch beim Programmieren üblich, schreibt man die Variable, die das Ergebnis enthalten soll, nach links.

Beim Programmieren ist zu beachten, dass das Gleichheitszeichen verschieden benutzt wird. In C und vielen anderen Sprachen ist das einfache Gleichheitszeichen die Anweisung, dass die Variable auf der linken Seite den Wert der rechten Seite erhalten soll. Es handelt sich also um eine Zuweisung und der Wert auf der linken Seite muss ein gültiger „Links-Wert“ oder auch „L-value“ sein, was bedeutet, dass ihm etwas zugewiesen werden kann. Die Zuweisung ist also nicht kommutativ.



Wird dagegen geprüft, ob die beiden Seiten gleich sind, schreibt man in C zwei Gleichheitszeichen == .

Wenn sich die prinzipiell gleichen Rechenaufgaben mit unterschiedlichen Werten wiederholen, kann man sich die Arbeit leichter machen, wenn man den unterschiedlichen Werten einen Namen gibt und stattdessen die Aufgabe erst einmal mit dieser Variablen löst. Wenn sich also die Belastbarkeit P der Widerstände ändern kann, erhalten wir:

$$50\,W / n = P$$

<=> $n = 50W/P$

Um diese äquivalenten Umformungen ausführen zu können muss man also die Umkehrfunktionen zu den Operationen kennen, so wir sie uns oben erarbeitet haben. Mit Hilfe der Umkehrungen formt man die Gleichung um, bis sie die gewünschte Form hat, üblicherweise bis die gewünschte Variable wie hier das n alleine auf der linken Seite steht.

13.1 Verhältnis, Entsprechung und Dreisatz

Möchte man Verhältnisse umrechnen, bei denen man nicht sagen kann, dass etwas „gleich“ ist, kann man es als Entsprechung ausdrücken. Habe ich beispielsweise einen VCO, dessen Frequenz linear von der Steuerspannung abhängt und die Kennlinie durch den Nullpunkt geht, finde ich z.B. dass ich 5,8MHz bei 1,3V erhalte. Die 5,8MHz entsprechen also den 1,3V. Nun möchte ich wissen, welche Spannung ich für 7,3MHz brauche:

$$5{,}8\,MHz \;\widehat{=}\; 1{,}3V$$
$$1\,MHz \;\widehat{=}\; 1{,}3V / 5{,}8$$
$$7{,}3\,MHz \;\widehat{=}\; 1{,}3V / 5{,}8 * 7{,}3 \approx 1{,}6V$$

Diese Art zu rechnen nennt man *Dreisatz*. Sie kombiniert das Rechnen mit Verhältnissen mit der Äquivalenten Umformung, um einfache lineare Zusammenhänge auszurechnen.

13.2 Lineare Gleichung

Viele erinnern sich aus der Schule an den Dreisatz, aber sein Nutzen ist sehr begrenzt. Schreibt man das Ganze als lineare Gleichung, wird es viel universeller:

$$U = 1{,}3V / 5{,}8MHz * f = 0{,}22\,V/MHz * f = 0{,}22\,\mu V/Hz * f$$

In dieser Schreibweise als Formel kann ich auch leicht ausdrücken, dass der Zusammenhang einen so genannten *Offset* hat, die Kurve also nicht durch den Nullpunkt geht. Auch kompliziertere Zusammenhänge lassen sich als Gleichung schreiben und mit den äquivalenten Umformungen in die gewünschte Form bringen.

14 Rechnen mit Einheiten

Einheiten haben wir nun schon benutzt, aber sie können sich im Laufe einer Berechnung auch verändern, man kann mit ihnen rechnen. Für Einheiten gilt der alte Merksatz, dass man Äpfel und Birnen nicht addieren kann. 2 Äpfel plus 3 Birnen bleiben eben 2 Äpfel plus 3 Birnen. Da gibt es nichts zu rechnen. Auch in der Technik machen Additionen von Größen mit unterschiedlichen Einheiten meistens gar keinen Sinn. Das Rechnen mit Größen mit unterschiedlichen Einheiten wird sich also hauptsächlich auf Multiplikation und Division beziehen.

Hier verlassen wir nun den Bereich der reinen Mathematik. Um mit Einheiten rechnen zu können, muss man wissen, was sie physikalisch bedeuten und wie sie zusammenhängen. Eines der einfachsten Gesetze ist das Leistungsgesetz. In der Elektrik ist die Leistung das Produkt aus Strom und Spannung: $P = U * I$. Wichtig ist dabei darauf zu achten, dass Strom und Spannung an den richtigen Stellen in der Schaltung gemessen werden. Das Leistungsgesetz gilt natürlich nur für einen Strom I der unmittelbar aufgrund einer Spannung U fließt.

Zu jeder physikalischen Größe gehört eine Einheit. Wenn man eine Formel für eine konkrete Berechnung benutzen möchte, betrachtet man jede physikalische Größe wie eine Variable, in die man eine Zahl mit einer Einheit einsetzt. Mit der Einheit selbst wird wie mit einer Konstanten gerechnet, die mit der Zahl davor multipliziert wird. Welche Einheiten miteinander multipliziert oder dividiert eine andere Einheit ergeben, ergibt sich aus den physikalischen Gesetzen.

Dieser einfache Zusammenhang, dass die Multiplikation der Einheiten meist direkt die Einheit des Produkts ergibt, ist ein Vorteil des SI-System.

An einem Widerstand wird eine Spannung U von 8,7 Volt[12] gemessen und es fließt ein Strom I von 2,4 Ampere[13]. Es ergibt sich also:

$$P = U * I = 8{,}7V * 2{,}4A = 8{,}7*2{,}4\ VA = 21W$$

> Kleiner Vorgriff: Beim Wechselstrom und ganz besonders an komplexen Bauteilen sind Strom und Spannung vektorielle Größen, die nur unter Berücksichtigung ihrer Phasenlage multipliziert werden dürfen. In dieser einfachen Form gilt diese Formel nur für Gleichstrom.

Das Ohm[14]´sche Gesetz beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an einem normalen „idealen“ Widerstand. Jede Änderung der Spannung bewirkt eine Änderung des Stroms um den gleichen Faktor.

$$R = U / I = 8{,}7V / 2{,}4A = 8{,}7/2{,}4\ V/A = 3{,}6\Omega$$

12 nach dem Italiener *Alessandro Volta*
13 nach dem Franzosen *André-Marie Ampère*
14 nach dem Deutschen *Georg Simon Ohm*

Eine weitere Messung während eines anderen Betriebszustands könnte z.B. folgendes ergeben:

R = 6,1V / 1,7A = 3,6Ω

und P = 6,1V * 1,7A = 10W

Der Wert eines Widerstands ist also eine sogenannte „eingeprägte Eigenschaft“ des Bauteils. Sie ist konstant und ändert sich nicht. Die Leistung dagegen ändert sich quadratisch mit der angelegten Spannung. Wenn bei einem Widerstand eine Leistung angegeben ist, ist dies die maximale Leistung mit der er betrieben werden kann, ohne zerstört zu werden. Sie ist aber keine konstante Eigenschaft des Bauteils.

> Es ist sinnvoll, die Zahlen und die Einheiten jeweils zusammen zu schreiben. Wenn man „von Hand“ rechnen muss, kann man auch die Zehnerpotenzen noch zusammen schreiben, um sich das Rechnen einfacher zu machen.
>
> P = U I = 3,4mV * 2,1mA = 3,4 * 2,1 * 10^{-3} * 10^{-3} VA = 7,14*10^{-6} W = 7,14µW
>
> Beachte, dass pro Zahl nur ein Kennbuchstabe für die Zehnerpotenzen benutzt werden darf.

15 Grafische Darstellung

Elektrische Größen, die man in verschiedenen Betriebszuständen messen kann, werden gern grafisch dargestellt, üblicherweise in einem Koordinatensystem aus zwei Achsen, die senkrecht aufeinander stehen. Die Waagerechte nennt man allgemein x-Achse, die Senkrechte die y-Achse. Man sagt, die y-Achse ist „über“ der x-Achse aufgetragen. Eine typische Darstellung ist der Strom über der Spannung. Für gewöhnlich trägt man die frei einstellbare Größe auf der x-Achse auf und die gemessene auf der y-Achse. Die grafische Darstellung gibt uns z.B. schnell einen Überblick über das Verhalten eines Bauteils.

Auch hier finden wir wieder oft den dekadischen Logarithmus. Besonders wenn Werte über mehrere Größenordnungen dargestellt werden müssen, ist die logarithmische Darstellung besser geeignet als die lineare, weil die Details bei den niedrigen Werten sonst nicht dargestellt werden könnten.

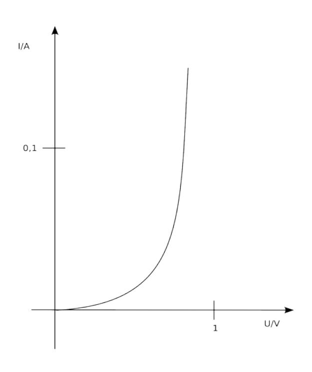


Abb. 6: Grafische Darstellung

15.1 Satz des Pythagoras

Hat man einen Punkt im Koordinatensystem definiert, so ist oft der Abstand vom Nullpunkt bzw. Ursprung interessant. Um diesen zu berechnen, könnte man messen. Meist ist es aber besser zu rechnen, weil sich diese Methode auch automatisieren bzw. programmieren lässt. Mit bekannten Koordinaten in rechtwinkligen Koordinaten ist der Abstand vom Ursprung die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, und die Koordinaten sind die Katheten a und b. Die Berechnung erfolgt über den Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

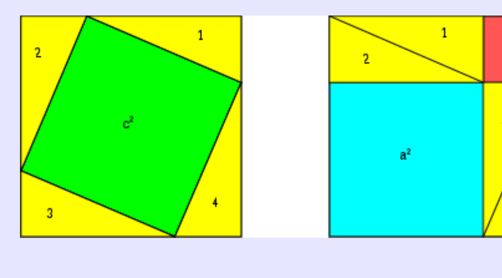
In der grafischen Darstellung sind die Katheten a und b die Koordinaten x und y. Und die Hypotenuse c nennt man hier oft auch den Radius r.



In der Mathematik sind Sätze beweisbare Behauptungen. Ein Beweis für diesen Satz geht wie folgt: Man nimmt ein rechtwinkliges Dreieck und kopiert es zweimal je vier Mal. Die einen 4 legt man so zusammen, dass die rechten Winkel nach außen zeigen und die Katheten a und b abwechselnd reihum die Außenkanten ein Quadrat mit Kantenlänge a+b ergeben. Innen ergibt sich ein gekipptes Quadrat mit der Kantenlänge c. Die anderen 4 Dreiecke legt man paarweise zu Rechtecken mit den Kantenlängen a und b zusammen. Diese beiden Rechtecke legt man so über Eck zusammen, dass man das Ganze mit einem Quadrat der Kantenlänge a und einem der Kantenlänge b wieder zu einem Quadrat der Kantenlänge a+b ergänzen kann.

Die großen Quadrate sind also gleich groß. Und die Flächen der jeweils 4 Dreiecke sind auch gleich groß. Nun nehme ich die Dreiecke weg. Ich habe also von den identischen großen Flächen jeweils identische kleinere Flächen weggenommen. Also muss das, was übrig ist auch gleich sein.

Und das, was übrig ist, ist auf der einen Seite a2+b2 und auf der anderen Seite c2.



16 Winkel und Kreisfunktionen

Viele Dinge im Amateurfunk drehen sich um Schwingungen. Nichts, was wir bisher gelernt haben, ist geeignet, eine Schwingung darzustellen. Die einfachste Art eine Schwingung zu beschreiben ist ein Zeiger, der sich im Kreis bewegt, so wie z.B. der Zeiger einer Uhr. Schwingung bedeutet im allgemeinsten Fall, dass sich eine Bewegung gleichförmig wiederholt; hier also die wiederholte Kreisbewegung des Zeigers.

Uhrzeiger bewegen sich rechts herum. Aus verschiedenen Gründen hat man sich dazu entschieden, in der Mathematik die Kreisbewegung andersherum zu beschreiben. Man beginnt in der grafischen Darstellung mit dem Pfeil entlang der x-Achse nach rechts und nennt das den Nullwinkel. Der Zeiger dreht sich nach oben zur y-Achse, dann nach links in die negative x-Richtung, weiter nach unten in die negative y-Richtung und dann wieder zurück auf die Anfangsposition.

Man spricht von einem rechtshändigen System. Nimmt man den Daumen der rechten Hand als Drehachse, geben die Finger eine Drehrichtung an. Eine Schraube mit üblichem Gewinde muss in Richtung der Finger gedreht werden, um sich in Richtung des Daumen zu bewegen. Das beschreibt auch z.B. die Richtung des magnetischen Felds als Folge eines fließenden positiven Strom. Da wir aber in der Technik den Fluss der negativ geladenen Elektronen betrachten, ist das ein linkshändiges System.

Um den Kreis mathematisch genauer beschreiben zu können, wählen wir den Zeiger als Pfeil mit der Länge 1. Der Pfeil beschreibt dann den sogenannten Einheitskreis, weil er den Radius 1 hat. Der Umfang eines Kreises ist 2 mal der Radius mal Kreiszahl π[15] ≈ 3,14. Da der Radius 1 ist, ist der Umfang also 2π. Wenn man die Position des Zeigers auf dem Kreisbogen betrachtet, erhält man ein Maß für den Winkel, den der Zeiger mit der positiven x-Achse einnimmt. Dieses Winkelmaß nennt man das Bogenmaß a. Es ist in Mathematik und Wissenschaft sehr gebräuchlich. Im Alltag und in der Technik multipliziert man den Winkel im Bogenmaß mit 180°/π und erhält so das Gradmaß α[16].

Abb. 7: Einheitskreis

Das Bogenmaß hat Vorteile, weil es auf dem Einheitskreis etwas Reales repräsentiert, eben die Strecke entlang des Kreisbogens, den der Winkel überstreicht. Das Gradmaß hat Vorteile, weil es die oft bedeutenden Winkel 30°, 45°, 60° und 90° mit ganzen Zahlen beschreibt. Im Bogenmaß erreicht man ähnliches mit Bruchzahlen, in dem man π als Faktor immer stehen lässt.

Bogenmaß a	**Gradmaß α**
0	0°
π / 6	30°
π / 4	45°
π / 3	60°
π / 2	90°
π	180°
2π	360°

Man findet im Alltag auch oft den Begriff der *Steigung* in Prozent.
Damit wird der Höhenunterschied entlang einer ebenen Strecke bezeichnet. Gewinnt z.B. eine Straße entlang von 1km „auf der Karte" eine Höhe von 100m, so hat sie eine Steigung von
100m / 1km = 10%.
Eine Steigung von 100% entspricht also einem Winkel von 45°.

15 griechischer Buchstabe: das kleine Pi
16 griechischer Buchstabe: das kleine Alpha

Betrachtet man nun das Dreieck, welches unser Zeiger zusammen mit einer Senkrechten zur x-Achse und dann einer Waagerechten zur y-Achse bildet, so erhalten wir die Funktionen, die den Kreis im Koordinatensystem beschreiben.

> Beachte in der Grafik oben, dass Sinus und Kosinus ein Rechteck aufspannen. Es ist bei einem Rechteck gleichgültig, ob man die obere oder untere Seite betrachtet, bzw. die rechte oder linke.

Die Breite bildet den Kosinus, kurz auch *cos* genannt. Und die Höhe ist der Sinus, kurz *sin*. Dabei handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse immer 1 ist. Der Satz des Pythagoras[17] lautet also im Einheitskreis

$$\sin^2(a)+\cos^2(a) = 1$$

Damit lassen sich viele Werte exakt berechnen. So sind z. B. bei einem Winkel von 45° die beiden Katheten gleich lang.

$x^2 + y^2 = 1 \quad | \; y=x$

$2x^2 = 1$

$x^2 = ½$

$$x = \sqrt{1/2}$$

=> Sinus und Kosinus von 45° sind also exakt die Wurzel von 0,5.



> Die Kreiszahl π ist genau wie die Eulersche Zahl *e* eine sogenannte *Transzendente Zahl*. Diese gehören zu den Reellen Zahlen, lassen sich aber nicht wie z.B. *Wurzel aus 2* als Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks darstellen.
>
> Allgemein sind Zahlen dann transzendent, wenn sie sich nicht als Nullstelle eines ganzzahligen Polynom darstellen lassen. Die *Wurzel von 2* ist beispielsweise die Nullstelle des Polynom x^2-2 und damit nicht transzendent.

Zeichnet man nun die Werte von Sinus grafisch auf, so erhält man die wellenförmige Funktion, die die Frequenzen beschreibt, mit denen wir beim Funken ständig zu tun haben. Die x-Achse beschreibt hier typischerweise die Zeit. Ein vollständiger Durchlauf eines Sinus wird Periode T genannt.

> Aufpassen, dass der Faktor 2 zwischen der Periode T und und π beim Vollwinkel nicht übersehen wird: Eine Periode T entspricht im Bogenmaß 2π.

Die Frequenz der Welle verändert man, in dem man das Argument des Sinus mit einem Faktor ω multipliziert. Die Welle verschiebt man auf der x-Achse, in dem man eine so genannte Phasenlage p addiert. Mit einem Vorfaktor A läßt sich die Amplitude verändern und schließlich kann man die Schwingung noch auf der y-Achse mit einem „Gleichspannungsanteil“ B verschieben:

17 nach dem historischen Griechen *Pythagoras von Samos*

$y = A\ sin\ (\omega x + p) + B$

Hier finden wir auch den Grund dafür, dass oft mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\ \pi\ f$ gerechnet wird. Die Definition des *Hertz*[18] als Schwingung pro Sekunde ist zwar sehr anschaulich, aber zum Rechnen ist oft der Faktor 2π nötig, so dass man ihn auch gleich dazu nehmen kann. Würde man direkt den Faktor im Sinus als Frequenz bezeichnen, wäre diese eine eher unanschauliche Größe.

Der Kosinus sieht prinzipiell genau so aus wie der Sinus, er ist nur um 90° verschoben. Das wird auch anschaulich im Einheitskreis deutlich. Wenn man diesen um 90° auf die Seite legt, vertauschen sich einfach Sinus und Kosinus.

Genauer betrachtet ändern sich dabei Vorzeichen.

Die oben erwähnte Steigung in Prozent führt zu einer weiteren Kreisfunktion: Dem Tangens, kurz *tan*. Der Tangens ist das Verhältnis der Katheten (also Sinus und Kosinus) im Einheitskreis. Er beschreibt in der Mathematik die Steigung.

Betrachtet man die Steigung an jedem Punkt vom Sinus findet man dabei genau die Werte vom Kosinus, beim Kosinus dann den negativen Sinus, dann wieder weiter zum negativen Kosinus und schließlich wieder zum Sinus.

Diese Betrachtung von Steigungen einer Funktion wird in der Mathematik *Ableitung* genannt.



Betrachtet man nun zwei Schwingungen gleicher Frequenz f, aber verschiedenen Phasenlagen p1 und p2, so nennt man die Differenz φ[19] = p2 – p1 die Phasendifferenz. In der Wechselspannungstechnik wird oft der so genannte Phasenwinkel φ zwischen Spannung und Strom betrachtet. Der Kosinus davon ist die bereits früher erwähnte Komponente, die beim Leistungsgesetz für Wechselspannung beachtet werden muss. Er wird auch der *Wirkfaktor* genannt.

$P = U\ I\ cos(\varphi)$

Sind Spannung und Strom in Phase, ist die Differenz 0 und der Kosinus 1 und wir erhalten wieder das von der Gleichspannungstechnik gewohnte Leistungsgesetz P = U I.

16.1 Darstellung in Polarkoordinaten

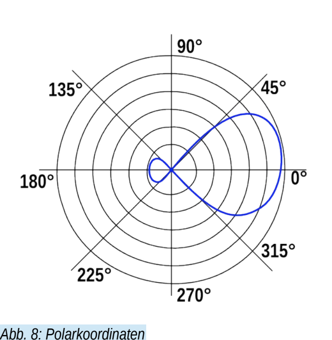


Abb. 8: Polarkoordinaten

Mithilfe der Winkel ergibt sich eine andere wichtige grafische Darstellung. Will man z. B. die Abstrahlcharakteristik einer Antenne darstellen, sind senkrechte x- und y-Koordinaten unpraktisch. Man möchte die abgestrahlte Hochfrequenz über der Himmelsrichtung auftragen. Also wählt man ein Koordinatensystem, das genau dies natürlich darstellt. Der Azimuth-Winkel wird im Kreis herum um einen Mittelpunkt aufgetragen und die gemessene Leistung als Radius, also Entfernung vom Mittelpunkt.

h *Hertz*
kleine Phi

Hier schließt sich sprichwörtlich der Kreis. Wie wir auch schon im Einheitskreis gesehen haben, sieht man auch hier, dass 360° dasselbe ist wie 0°, bzw. im Bogenmaß 2π dasselbe wie 0.

17 Taschenrechner

Wir werden heutzutage die meisten Berechnungen, die wir nicht im Kopf machen können, mit einem Taschenrechner ausführen. Die Modelle und ihre Fähigkeiten sind recht unterschiedlich. Wie bei jeder Maschine hängt die Qualität der Ergebnisse davon ab, wie vertraut der Anwender mit der Bedienung ist.

Die Rechenregel „Punktrechnung vor Strichrechnung" beherrscht heute jeder wissenschaftliche Taschenrechner. Unterschiede gibt es aber darin, ob man Funktionstasten wie *log* vor oder nach dem Argument drücken muss. Der mit *log* bezeichnete Logarithmus ist meist der von uns häufig benötigte zur Basis 10.

Sollte das eigene Modell einige benötigte Funktionen nicht haben, kann man sich mit den erlernten Rechenregeln behelfen, wie z.B. die Umrechnung der Basis eines Logarithmus auf Seite 21.

Beachten sollte man auch die Mehrfach-Belegung von Tasten bei vielen Geräten. Die Taste für **10^* ist meist mit *EXP* beschriftet. In der Anzeige ist das *10^ häufig nur durch einen Abstand zur Mantisse oder durch eine kleinere Schriftgröße kenntlich gemacht. Das Minus als Vorzeichen ist meist eine andere Taste als das Minus für die Subtraktion. Das Dezimalzeichen ist üblicherweise der Punkt. Für die Kreisfunktionen bieten die meisten Taschenrechner an, ob sie im Gradmaß *deg* oder im Bogenmaß *rad* rechnen sollen.

Damit sollte man sich vertraut machen, bevor man sich auf die Ergebnisse des Geräts verlässt. Wichtig ist wie oben schon erwähnt auch, dass man die vielen Nachkommastellen, die sich z.B. bei einer Division häufig ergeben, korrekt interpretiert, also im Regelfall richtig rundet.

Wichtig ist auch, dass uns der Taschenrechner nur die Arbeit mit den Zahlen abnimmt. Die SI-Kürzel korrekt als 10er-Potenz einzugeben und wieder zu interpretieren liegt am Bediener, ebenso das Rechnen mit den Einheiten und ihre korrekte physikalische Interpretation.

R = 1,2 kV / 870 µA = $1{,}2 \cdot 10^{3} / 870 \cdot 10^{-6}$ V/A

Den blau hinterlegten Teil kann man nun in den Taschenrechner tippen:

```
1.2 EXP 3 / 870 EXP 6 +/- =
```

```
1.37931034483E6
```

Das Ergebnis wird sinnvoll gerundet auf 1,4E6 und dass V/A ein Ω ist, muss man selber wissen, ebenso dass E6 ein Mega ist, also erhalten wir:

R = 1,2 kV / 870 µA =1,4 MΩ

Hat man einmal keinen wissenschaftlichen Taschenrechner zur Hand, kann man die Rechenregeln benutzen und wenigstens Teile der Rechnung mit einem einfacheren Taschenrechner machen.

$1{,}2 \cdot 10^{3} / 870 \cdot 10^{-6} = 1{,}2/870 \cdot 10^{(3-(-6))} = 0{,}001379\ldots \cdot 10^{9} = 1{,}4 \cdot 10^{6}$

Der Taschenrechner nimmt uns viel Rechenarbeit ab, aber man muss sich mit der Bedienung vertraut machen.

18 Schlusswort

Wir haben nun die wichtigsten mathematischen Methoden, die wir zum Verstehen der Funktechnik brauchen, zusammen. Dabei haben wir auch einige vielleicht unerwartete Zusammenhänge kennengelernt, z. B. zwischen Wurzel und Logarithmus oder den Kreisfunktionen und dem Satz des Pythagoras. Außerdem sind uns Begriffe begegnet, die man bei Interesse noch vertiefen könnte, wie z. B. die Ableitung oder die Komplexen Zahlen.

Anhang

2 Übungen

1 Einleitung

Hier werden einige Zahlenbeispiele gegeben, die zum Kurs selber durchgerechnet werden können. Im zugehörigen Lösungsheft stehen auch weiterführende Erklärungen.

2 Zählen

Schreibe die Zahlen von 0 bis 17 untereinander im normalen 10er-System auf. Schreibe dann daneben die entsprechenden Zahlen im 8er-System. Werden die Zahlen kürzer oder länger?

Hinweis: Der Rest der Übungen wird im „normalen“ 10er-System gerechnet.

3 Addition

Addiere 7823 zu 23876.

4 Subtraktion

a) Subtrahiere 3 von 8.

b) Subtrahiere 13 von 7.

c) Subtrahiere 2 von -6.

d) Subtrahiere -3 von -4.

5 Multiplikation

a) Multipliziere 34 mit 2.

b) Multipliziere 8 mit -3.

c) Multipliziere -3 mit -4.

6 Division

a) Dividiere 32 durch 8.

b) Dividiere 26,4 durch 5.

c) Dividiere 6 durch 40 und drücke das Ergebnis in Prozent aus.

d) 3 von 12000 Transistoren sind bei der Kontrolle als defekt erkannt worden. Wie viel Promille sind das?

7 Rechenregeln

Finde praktische Beispiele für 2 * (3+4) und 2*3 +4.

8 Potenzen

a) Berechne 2 hoch 3.

b) Schreibe 27k als ganze Zahl.

c) Schreibe $4{,}6 * 10^4$ erst als ganze Zahl und benutze dann ein SI-Zeichen.

9 Umkehrungen

a) Berechne 3+2 und 2+3.

b) Berechne 3*2 und 2*3.

c) Berechne 3-2 und 2-3.

d) Berechne 3/2 und 2/3

e) Berechne 2^3 und 3^2.

10 Wurzel

a) Bestimme die 3. Wurzel aus 343

b) Bestimme die Quadratwurzel aus -16.

11 Logarithmus

a) Bestimme den Logarithmus von 343 zur Basis 7.

b) Bestimme den Logarithmus von 10^5 zur Basis 1000.

12 Notationen

a) Schreibe die Wurzel aus 13 als Funktion.

b) Schreibe $\log_{10} 7$ als Funktion.

13 Rechnen mit Variablen

a) $U_{ges} = U_R * n$ beschreibt den Spannungsabfall bei einer Reihenschaltung von gleichen Widerständen. Forme die Formel so um, dass sich einfach die benötigte Anzahl n für eine gegebene Gesamtspannung U_{ges} und eine zulässige Spannung pro Widerstand U_R ermitteln lässt.

b) Der bekannte VCO hat einen Spannungs-Offset von 1,5V. Wie sieht die lineare Gleichung nun aus?

14 Rechnen mit Einheiten

An einem Widerstand mit 8 Ω werden 32W Leistung umgesetzt. Welcher Strom fließt und welche Spannung liegt an?

15 Grafische Darstellung

a) Skizziere die Kennlinien eines Widerstands, einer Konstantstromquelle und eines stabilisierten Netzteils.

b) Berechne die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 3 und 4.

16 Winkel und Kreisfunktionen

a) Bestimme den Sinus von 30° und den Kosinus von 60°.

b) Schätze den Sinus vom Bogenmaß 10^{-3}.

17 Taschenrechner

a) Berechne die Summe vom Quadrat von Sinus und Kosinus von 23,67°.

b) Ein Verstärker liefert bei einer Eingangsleistung von 1,78W eine Ausgangsleistung von 56W. Wie ist seine Verstärkung in dB?

c) Berechne $10^{30} + 1$

d) Die gemessene Effektivspannung an einem Netztrafo beträgt 15,7V. Ein Glättungskondensator sollte mindestens die Spitzenspannung vertragen. Berechne diese in dem Du mit der Wurzel aus 2 multiplizierst.

e) Welche Leistung entspricht 12,6 dBm?

3 Lösungen

1 Einleitung

Hier werden Lösungen und Erklärungen dazu geliefert. Bei vielen Aufgaben sind mehrere Lösungen möglich. Die Angaben hier sind also Lösungsbeispiele.

2 Zählen

10er System	8er System
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17
16	20
17	21

Je kleiner die Basis des Zahlensystems ist, desto größer bzw. länger werden die Darstellungen der Zahlen. Bei kleineren Systemen muss man sich weniger Symbole für die Ziffern merken, dafür werden die Darstellungen der Zahlen immer länger. Unser übliches 10er-System ist für uns ein guter Kompromiss, weil wir uns dank unserer 10 Finger auch 10 verschiedene Ziffern gut merken können.

3 Addition

```
  7823
+23876
  1 1
 31699
```

Beachte die korrekte Ausrichtung der Stellen und die Überträge.

4 Subtraktion

a) 8 - 3 = 5

b) 7 - 13 = -6

Beachte, dass die Zahl die im Text als erstes genannt wird, in der Subtraktion hinten steht. Ist in der Subtraktion die zweite Zahl größer als die erste, wird das Ergebnis negativ.

c) -6 – 2 = -8

Ist die erste Zahl schon negativ, wird das Ergebnis noch negativer. Ein praktisches Beispiel ist, wenn ich von einem schon überzogenen Girokonto noch mal Geld abhebe.

d) -4 - (-3) = -4 + 3 = 3 - 4 = -1

Wenn beide Zahlen negativ sind, sollte man Klammern benutzen. Eine negative Zahl subtrahieren ist das gleiche wie die entsprechende positive Zahl zu addieren.

5 Multiplikation

a) 34 * 2 = 68

b) 8 * (-3) = -24

Ist eine der beiden Zahlen negativ, dann ist auch das Ergebnis negativ. In der Elektrotechnik hätte ich dann so etwas wie einen negativen Widerstand, wie er bei einem passiven Bauteil nicht vorkommen kann.

c) (-3) * (-4) = 12

Sind beide Zahlen negativ, dann ist das Ergebnis positiv. „Minus mal Minus gibt Plus“. In der Elektrotechnik hätte man dann beispielsweise an einen Heizwiderstand eine Spannung in umgekehrter Richtung angelegt. Das führt dazu, dass der Strom ebenfalls in die entgegengesetzte Richtung fließt, und die Leistung trotzdem positiv ist: an dem Heizwiderstand kann man sich genauso leicht die Finger verbrennen, egal in welcher Richtung der Strom fließt.

6 Division

a) 32 / 8 = 4

Ist das Ergebnis einer ganzzahligen Division ebenfalls ganzzahlig, so ist die zweite Zahl ein Teiler der ersten.

b) 26,4 / 5 = 264 / 50 = 132 / 25 = **5 7/25 = 5,28**

Nebenrechnungen:
5*25 = 125 und 132-125=7
7/25 = 7/25 *4/4 = 28/100 = 0,28

Auch wenn die Zahlen nicht so einfach sind, sollte man das Ergebnis grob im Kopf abschätzen, um eine Plausibilitätskontrolle für das mit dem Taschenrechner erhaltene Ergebnis zu haben.

Je nach Aufgabe können verschiedene Arten das Ergebnis aufzuschreiben sinnvoll sein.

c) 6 / 40 = 3/20 = 0,15 * 100/100= 0,15*100 /100 = 15%

In Prozent umrechnen bedeutet erst mit 100 erweitern und dann die /100 als % schreiben.

d) 3 / 12000 * 1000/1000 = 3/12 ‰ = 1/4 ‰ = 0,25 ‰

7 Rechenregeln

2 * (3+4) könnte eine Parallelschaltung von 2 Widerständen beschreiben. Durch den einen fließen 3A, durch den anderen 4A. Es liegt eine Spannung von 2V an.

2*3 + 4 könnte eine Schaltung von zwei Verbrauchern sein, wo mich die Gesamtleistung interessiert. Von dem einen weiß ich, dass er 4W verbraucht. Den anderen habe ich mit 2V und 3A gemessen.

8 Potenzen

a) 2^3 = 2*2*2 = 8

b) 27k = 27 * 1000 = 27000

c) 4,6 * 10^4 = 4,6 * 10000 = 46000 = 46k

9 Umkehrungen

a) 3+2 = 2+3 = 5

b) 3*2 = 2*3 = 6

Addition und Multiplikation sind kommutativ, also ist die Reihenfolge der Berechnung egal.

c) 2-3 = -1 und 3-2 = 1

d) 3/2 = 1,5 und 2/3 = $0,\overline{6}$

Die Vertauschung der Reihenfolge bei Subtraktion und Division ergibt das jeweilige *Inverse* der Zahl. Eine Eigenheit des Inversen ist, dass die Verknüpfung der Ergebnisse mit der Umkehrfunktion das so genannte *Neutrale Element* liefert.

$-1 + 1 = 0$

Die Null ändert bei der Addition und Subtraktion den Wert nicht, sie ist also „neutral".

$1{,}5 * 0{,}\overline{6} = 1$

Die 1 ändert bei Multiplikation und Division den Wert nicht.

e) $2^3 = 2*2*2 = 8$

$3^2 = 3*3 = 9$

Bei der Potenz gibt es keine ähnlichen Rechenregeln.

10 Wurzel

a) Hat man keinen Taschenrechner zur Hand, ist „Herantasten" über die Umkehrung eine Möglichkeit:

$5^3 = 125$ ist zu wenig

$10^3 = 1000$ ist zu viel

$7^3 = 343$ passt genau, also $\sqrt[3]{343}=7$

b) $\sqrt{-16} = \sqrt{16 * -1} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$

11 Logarithmus

a) Auch hier kann man sich ohne Taschenrechner herantasten:

$7^2 = 49$ ist zu wenig

$7^4 = 2401$ ist zu viel

$7^3 = 343$ passt genau, also $\log_7 343 = 3$

b) $\log_{1000} 10^5 = \log_{10} 10^5 / \log_{10} 10^3 = 5/3$

Unbekannte Basen (hier 1000) führt man über die bekannte Rechenregel auf eine bekannte Basis (hier 10) zurück.

12 Notationen

a) sqrt (13)

Funktionsnamen in Programmen sind oft englisch abgekürzt. *sqrt* steht für „square root".

b) $\log_{10}(7)$

Bei Funktionen, die mehrere Argumente brauchen so wie hier z.B. auch die Basis, sind häufig vorkommende Werte so wie hier die 10 oft als eigene Funktionen implementiert. Ebenso wie oben die 2. Wurzel als Quadratwurzel eine eigene Funktion hat. Diese „maßgeschneiderten“ Funktionen werden oft auch schneller berechnet als ihre allgemeineren Versionen.

13 Rechnen mit Variablen

a) Durch Division durch U_R steht n wie gewünscht alleine. Und dann schreibt man es wie üblich auf die linke Seite.

$U_{ges} = U_R * n \qquad | \; / U_R$

$n = U_{ges} / U_R$

Wie zu erwarten ist das gesuchte Ergebnis die Gesamtspannung geteilt durch die für jeden Widerstand zulässige Spannung.

b) $U = 0{,}22\ \mu V/Hz * f + 1{,}5V$

Da f die Einheit Hz hat, kürzt sich das Hz auf dieser Seite vom + heraus und übrig bleibt als Einheit das V. Nun steht links und rechts vom + das V als Einheit und die beiden Teilausdrücke können addiert werden. Die Summe ist wieder in V, und das V ist die Einheit der Spannung auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen. Es passt also alles. Man sollte jede Gleichung anhand der Einheiten prüfen.

14 Rechnen mit Einheiten

$P = U * I$

$U = R * I$

Der Ausdruck für U aus dem Ohmschen Gesetz wird ins Leistungsgesetz eingesetzt, und anschließend wird nach I aufgelöst:

$P = R * I^2$

$$I = \sqrt{P/R} = \sqrt{32W/8\Omega} = \sqrt{4W/\Omega} = 2A$$

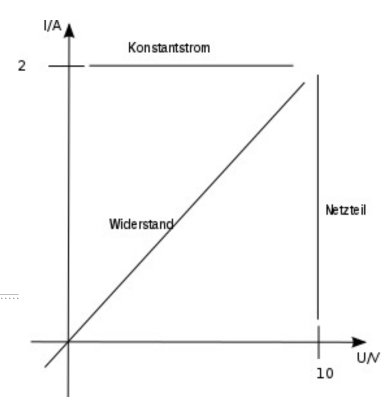
Leistung durch Widerstand hat die Einheit Ampere zum Quadrat, wie man auch leicht ausrechnen kann. Nun noch das Leistungsgesetz nach der Spannung auflösen:

$U = P/I = 32W/2A = 16V$

Es liegen also 16V an und es fließen 2A.

15 Grafische Darstellung

a) Dargestellt sind eine Konstantstromquelle mit 2A, ein stabilisiertes Netzteil mit 10V und ein Widerstand mit 5 Ω. Bei



realen Geräten wird das Netzteil einen maximalen Strom haben, den es liefern kann, und die Konstantstromquelle wird eine maximale Spannung haben, die sie liefern kann. Und die Kennlinien werden auch meist nicht so perfekt gerade sein.

b) $3^2 + 4^2 = 9+16 = 25$

$$\sqrt{25} = 5$$

Die Hypotenuse hat die Länge 5.

16 Winkel und Kreisfunktionen

a) sin(30°) = cos (60°) = 0,5

Die Drittelung des rechten Winkels ergibt exakt diesen runden Wert. Dies sollte man parat haben, wenn man sich mit Trigonometrie beschäftigt. Wer mag, kann sich das selbst mit etwas Aufwand mit dem Satz des Pythagoras beweisen. Generell ist dieser Satz oft nützlich bei Kreisfunktionen.

b) Das Ergebnis ist nur geringfügig kleiner als 10^{-3} . Für sehr kleine Winkel ist der Sinus ungefähr gleich dem Bogenmaß. Grafisch aufgetragen hat der Sinus im Bogenmaß um den Nullpunkt die asymptotische Steigung 1.

17 Taschenrechner

a) Ggf. zuerst auf DEG umstellen.

`23.67 [sin] [x²] + 23.67 [cos] [x²] =`

1

Je nach Taschenrechner müssen die Funktionen anders eingegeben werden und eventuell geklammert werden, z.B.

`( [sin] 23.67 ) [x²] + ( [cos] 23.67 ) [x²] =`

`1`

Dies war nun eher ein Beispiel dafür wie man den Taschenrechner nicht benutzen sollte. Das Ergebnis ist hier immer 1. Das ist eine der Rechenregeln aus der Trigonometrie. Versuche immer erst die Formel zu verstehen und zu vereinfachen bevor der Taschenrechner benutzt wird.

b) V = 10 * [$\log_{10}$] (56 / 1,78) = 15dB

Die Funktion für [$\log_{10}$] ist oft auch nur mit [log] beschriftet.

c) Auf jedem normalen Taschenrechner wird das Ergebnis wieder 10^{30} sein. Die 1 fällt unter den Tisch, weil sie unterhalb der Rechengenauigkeit liegt.

d) $15{,}7V * \sqrt{2} = 22{,}3V$

Das korrekte Ergebnis ist nicht 22,20315… wie der Taschenrechner anzeigt. Das Ergebnis wird auf die Genauigkeit der ursprünglichen Werte gerundet. Und es wird in diesem Fall sicherheitshalber aufgerundet, da es sich um eine Mindestspannung handelt. Genau genommen sollte auch noch die Messgenauigkeit als Sicherheit hinzugerechnet werden.

e) 12,6 dBm = 1mW * $10^{1,26}$ = 18,2mW

Zur Kontrolle kann man die dB in eine Summe von 10ern und 3ern zerlegen und abschätzen:

12,6 dB ~= (10 + 3) dB ~= 10 * 2 = 20

20 ~= 18,2, also passt das Ergebnis

Stichwortverzeichnis

Abbildungsverzeichnis